

ПОЧТИ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

Д. В. Маклаков

НИИММ Казанского государственного университета
dmitri.maklakov@ksu.ru

В работе проведены расчеты крутых периодических гравитационных волн, доказывающие справедливость асимптотической теории Лонгет-Хиггинса и Фокса для волн любой конечной глубины.

Асимптотическая теория почти предельных волн была разработана Лонгет-Хиггинсом и Фоксом [4–6]. Согласно [4], когда расстояние l между гребнем волны и уровнем нулевой скорости по уравнению Бернулли становится достаточно малым по сравнению с характерным размером, в окрестности гребня развивается “внутреннее течение”. Свободная поверхность этого течения имеет две симметричные наклонные асимптоты с внутренним углом в 120° . Максимальный угол наклона свободной поверхности превосходит 30° и достигает значения 30.37° . Наиболее удивительный результат работы [4] состоит в том, что свободная поверхность стремится к наклонным асимптотам осциллирующим образом и пересекает их бесконечное количество раз. Последнее, конечно, является верным только для волн, бесконечно близких к предельным, для почти предельных волн число пересечений может быть только конечным. Осциллирующие члены во внутреннем решении приводят к неожиданным последствиям. Как показано в [5] для волн бесконечной глубины и в [6] для уединенных волн, большинство волновых характеристик также осциллирует при стремлении волн к предельным. Для этих осцилляций были найдены явные аналитические формулы, из которых следует, что энергия волн, например, должна иметь бесконечную последовательность сменяющих друг-друга максимумов и минимумов.

Осцилляции волновых характеристик очень трудно выявить при численном счете, так как из [5], [6] следует, что их амплитуда уменьшается приблизительно в 81 раз от очередного максимума до следующего минимума. Это означает, что для того, чтобы различить, например, первые четыре экстремума, необходима точность в 10-12 значащих цифр в наиболее трудной для счета

ситуации не предельных, а почти предельных волн. Существование вторых экстремумов было обнаружено Танакой [12] и позднее отмечено Эвансом и Дором [2]. Явное численное подтверждение асимптотических формул было сделано в [6] на основе вычислений Танаки [13]. Все эти подтверждения относились к случаю уединенных волн. Недавно Лонгет-Хиггинс и Танака [7] провели расчеты характеристик волн бесконечной глубины и получили хорошее согласование с асимптотическими соотношениями работы [4].

В данной работе проведены расчеты двух полных периодов осцилляций Лонгет-Хиггинса и Фокса (четыре экстремума) во всем диапазоне отношений длин волн к глубине. Разработан метод трехточечных предсказаний, основанный на комбинации асимптотических формул с точными вычислениями характеристик трех близких друг к другу волн. Метод позволяет получить параметры осцилляций и тем самым предсказать характеристики всех крутых волн, в том числе и предельных.

Постановка задачи и интегральное уравнение. Рассмотрим периодические гравитационные прогрессивные волны длины λ , распространяющиеся с фазовой скоростью c под воздействием силы тяжести слева направо на поверхности жидкости конечной глубины. Обозначим через g ускорение силы тяжести. Выберем систему координат, движущуюся вместе с волнами, в которой движение жидкости будет установившимся. Будем рассматривать симметричные волны, предположив, что ось y является осью симметрии вместе с любой вертикальной прямой $x = n\lambda/2$. Жидкость считаем идеальной, несжимаемой, влиянием поверхностного натяжения пренебрегаем. На рис. 1(а) показано установившееся течение в физической плоскости $z = x + iy$.

Пусть $W = \phi + i\psi$ есть комплексный потенциал течения. Так же, как Коклет [1] и авторы многих других работ, будем считать, что фазовая скорость c равна средней скорости частиц жидкости на дне в установившемся движении. Через функцию W это условие можно выразить так:

$$c = [W(z + \lambda) - W(z)]/\lambda. \quad (1)$$

Положим, что $\phi = 0$ на оси y и $\psi = 0$ на дне. Обозначим через Q расход жидкости в установившемся движении, тогда $\psi = Q$ на свободной поверхности, и область комплексного потенциала W

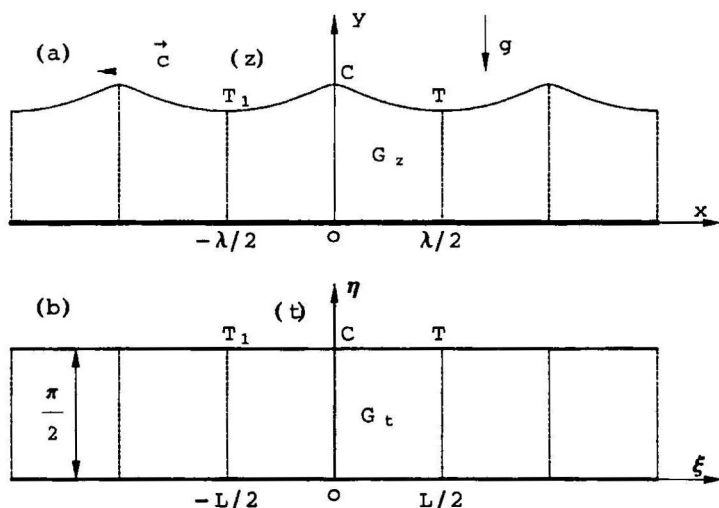


Рис. 1. (а) Течение в физической плоскости z . (б) Параметрическая плоскость t

есть горизонтальная полоса ширины Q . Отобразим область изменения W на полосу ширины $\pi/2$ в параметрической плоскости t (рис. 1б). Связь между комплексным потенциалом W и параметрической комплексной переменной $t = \xi + i\eta$ дается формулой

$$W = \frac{2}{\pi}Qt. \quad (2)$$

Следуя Шварцу [11], определим безразмерный параметр r_0 , отвечающий за длину волн:

$$r_0 = e^{-d}, \quad \text{где } d = 2\pi Q/(\lambda c). \quad (3)$$

Здесь d -параметр глубины, введенный Кокелетом [1]. Значение r_0 изменяется в пределах от 0 до 1. Для волн в жидкости бесконечной глубины $r_0 = 0$, для уединенных волн $r_0 = 1$. Пусть L есть длина волн в параметрической плоскости t . Из (1)–(3) следует, что $L =$

$-\pi^2/\ln r_0$. Таким образом, если r_0 задано, то параметр L также определен.

Чтобы задать периодические волны, в дополнение к r_0 необходим второй безразмерный параметр. В качестве такового выберем

$$A = \ln(v_t/v_c), \quad (4)$$

где v_c и v_t — скорости в гребнях и впадинах волн в установившемся движении. Параметр A отвечает за крутизну волн и изменяется в пределах от 0 до $+\infty$. Когда $A = +\infty$ ($v_c = 0$), волна имеет предельную высоту и угловую точку с внутренним углом в 120° на свободной поверхности. Случай малых значений A соответствует волнам малой амплитуды.

Введем в полосу G_t аналитическую функцию $\chi(t)$, такую, что

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2}{\pi} a e^{\chi(t)}, \quad (5)$$

где множитель a имеет размерность длины. Если положить

$$\operatorname{Re} \chi(\pi i/2) = 0, \quad (6)$$

то из (2), (5) легко вывести, что

$$a = \frac{Q}{v_c}, \quad \chi(t) = \ln \frac{v_c dz}{dW} = \ln \frac{v_c}{v} + i\theta, \quad (7)$$

где v — модуль, а θ — аргумент вектора скорости. Таким образом, $\chi(t)$ есть функция Жуковского. Введем обозначения

$$\mu(\xi) = \operatorname{Re} \chi(\xi + \pi i/2), \quad \theta(\xi) = \operatorname{Im} \chi(\xi + \pi i/2), \quad \tau(\xi) = d\mu/d\xi$$

и предположим, что функция $\tau(\xi)$ известна. Тогда из (6) следует, что

$$\operatorname{Re} \chi(t) = \mu(\xi) = U[\tau] = \int_0^\xi \tau(s) ds \quad (8)$$

при $t = \xi + \pi i/2$, $-\infty < \xi < \infty$. Кинематическое условие на дне

$$\operatorname{Im} \chi(t) = 0 \quad \text{при} \quad t = \xi, \quad -\infty < \xi < +\infty$$

и соотношение (8) представляют собой смешанную краевую задачу для аналитической функции $\chi(t)$ в полосе G_t . Следовательно, $\chi(t)$ можно восстановить по формуле Вудса [14]:

$$\chi(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu(s) ds}{\operatorname{ch}(t-s)}. \quad (9)$$

Из L -периодичности и четности функции μ заключаем, что

$$\theta(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{L/2} [\mu(s) - \mu(\xi)] K_0(s, \xi) ds = C[\mu], \quad (10)$$

где

$$K_0(s, \xi) = K(s - \xi) - K(s + \xi), \quad K(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(s + kL)}. \quad (11)$$

Продифференцировав уравнение Бернулли $v^2 + 2gy = \text{const}$ по ξ и используя формулы (2), (5), (8) и (10), выведем, что функция $\tau(\xi)$ удовлетворяет нелинейному интегральному уравнению

$$\tau(\xi) = \frac{2}{\pi} E \exp(3U[\tau]) \sin(CU[\tau]), \quad 0 \leq \xi \leq L/2, \quad (12)$$

где $E = ga/(v_c^2)$. Чтобы найти параметр E , необходимо добавить к (12) соотношение

$$\int_0^{L/2} \tau(\xi) d\xi = -A, \quad (13)$$

которое следует из (4). Соотношения (12), (13) представляют собой систему уравнений для определения функции $\tau(\xi)$ на отрезке $[0, L/2]$ и параметра E . Система (12), (13) решалась методом Ньютона. При этом использовался способ дискретизации, разработанный автором в [8–10].

Волновые характеристики. Будем исследовать следующие интегральные волновые характеристики:

среднюю глубину

$$h_a = \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} y(x) dx, \quad \bar{h}_a = \frac{h_a}{\lambda}; \quad (14)$$

среднюю потенциальную энергию на единицу площади

$$V = \frac{\rho g}{2\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} [y(x) - h_a]^2 dx, \quad \bar{V} = \frac{V(2\pi)^2}{\rho g \lambda^2}; \quad (15)$$

среднюю кинетическую энергию на единицу площади

$$T = \frac{\rho}{2\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} dx \int_0^{y(x)} [(v_x - c)^2 + v_y^2] dy, \quad \bar{T} = \frac{T(2\pi)^2}{\rho g \lambda^2}; \quad (16)$$

средний импульс на единицу площади

$$I = \frac{\rho}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} dx \int_0^{v(x)} (c - v_x) dy, \quad \bar{I} = \frac{I(2\pi)^{\frac{3}{2}}}{\rho g^{\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{3}{2}}}. \quad (17)$$

В этих формулах $y = y(x)$ есть уравнение свободной поверхности, ρ – плотность жидкости, v_x and v_y – абсцисса и ордината вектора скорости в установившемся движении. Безразмерные параметры обозначены чертой сверху. Помимо интегральных свойств введем безразмерную высоту впадины $\bar{h}_t = h_t/\lambda$, крутизну волн $\bar{H} = H/\lambda$, где $H = y(0) - y(\lambda/2)$, и квадрат безразмерной фазовой скорости $\bar{c}^2 = 2\pi c^2/(g\lambda)$. Для удобства сравнений параметры c^2 , V , I и T обезразмерены так же, как в работе Кокелета [1], где в качестве единицы длины была выбрана величина $\lambda/(2\pi)$.

Трехточечные предсказания. Согласно [4–6] закон осцилляций волновых характеристик имеет следующий вид:

$$F = F^* + a_L \varepsilon^3 \cos(\kappa \ln \varepsilon - b_L), \quad (18)$$

где F – осциллирующая характеристика, F^* – её предельное значение (здесь и далее обозначаем предельные значения звездочкой), $\kappa = 2.14291$ – корень уравнения

$$\frac{\kappa\pi}{6} \operatorname{th} \frac{\kappa\pi}{6} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}, \quad (19)$$

a_L и b_L – постоянные, зависящие от выбора F . Параметр ε отвечает за крутизну волн и стремится к нулю, когда волна приближается к предельной. Лонгет-Хиггинс и Фокс исследовали случаи волн бесконечной глубины [5] и уединенных волн [6]. При этом параметр ε задавался в виде

$$\varepsilon^2 = \begin{cases} 2\pi l/\lambda = \pi v_c^2/(g\lambda) & \text{для волн бесконечной глубины,} \\ l/h_t = v_i^2/(2gh_t) & \text{для уединенных волн,} \end{cases} \quad (20)$$

где l – расстояние между точкой на гребне волны и линией уровня нулевой скорости по уравнению Бернулли. Из соотношений (20) следует, что

$$\varepsilon = \begin{cases} e^{-A} \bar{v}_t / \sqrt{2} & \text{для волн бесконечной глубины,} \\ e^{-A} \bar{c}_{sol} / \sqrt{2} & \text{для уединенных волн,} \end{cases} \quad (21)$$

где $\bar{v}_t = (2\pi)^{\frac{1}{2}} v_t / (g\lambda)^{\frac{1}{2}}$ – безразмерная скорость во впадине волны, $\bar{c}_{sol} = v_t / (gh_t)^{\frac{1}{2}}$ – число Фруда для уединенной волны (безразмерная фазовая скорость). Предположив, что \bar{v}_t и \bar{c}_{sol} удовлетворяют (18), представим ε так:

$$\varepsilon = e^{-A} m, \quad m = \begin{cases} (2\pi \bar{H}^*)^{\frac{1}{2}} & \text{для волн бесконечной глубины,} \\ \bar{c}_{sol}^* / \sqrt{2} & \text{для уединенных волн.} \end{cases} \quad (22)$$

При выводе верхнего соотношения для m мы воспользовались формулой $(\bar{v}_t^*)^2 / (4\pi) = \bar{H}^*$, которая следует из уравнения Бернулли. Подставив (22) в (20), получим

$$F = F^* [1 + a_M e^{-3A} \cos(\kappa A - b_M)] + O(e^{-rA}), \quad (23)$$

где $r > 3$ – порядок асимптотической точности формулы (23),

$$a_M = a_L m^3 / F^*, \quad b_M = \kappa \ln m - b_L. \quad (24)$$

Соотношение (23) есть представление асимптотической формулы (18) через параметр A . Введем функцию

$$\Omega(A) = [F(A) / F^* - 1] e^{3A} / a_M. \quad (25)$$

Как следует из формулы (23), при больших значениях A эта функция должна быть близка к косинусоиде

$$\Omega(A) = \cos(\kappa A - b_M) + O(e^{(r-3)A}). \quad (26)$$

Для того, чтобы проверить справедливость формулы (23), необходимо в первую очередь найти F^* , a_M и b_M . Метод определения этих параметров основан на точном вычислении всего трех значений F при трех значениях A . Выберем некоторое достаточно большое A и вычислим

$$F_i = F(A_i), \quad i = \overline{1, 3}, \quad \text{где } A_1 = A - h, \quad A_2 = A, \quad A_3 = A + h,$$

h – заданный шаг. Подставив эти F_i и A_i в (23), получим систему трех уравнений с тремя неизвестными: F^* , a_M и b_M . Решение этой системы можно записать в виде

$$F^* = \frac{F_1 e^{-3h} + F_3 e^{3h} - 2F_2 \cos \kappa h}{2(\operatorname{ch} 3h - \cos \kappa h)} + O(e^{-rA}), \quad (27)$$

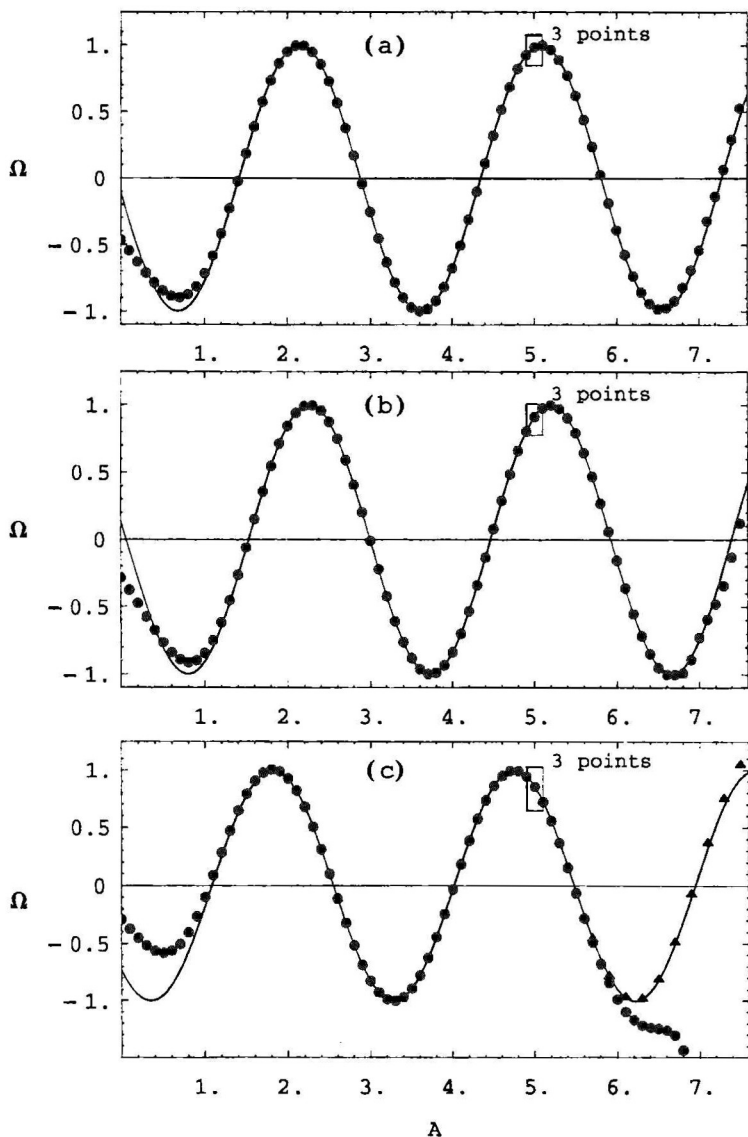


Рис. 2. Функции Ω от A : (а) $F = \bar{H}$, $r_0 = 10^{-13}$; (б) $F = \bar{c}^2$, $r_0 = 0.5$; (с) $F = \bar{V}$, $r_0 = 0.9$. Точки, $N = 1280$; треугольники, $N = 2000$. Сплошные линии построены с помощью трехточечных предсказаний

A_1, A_2, A_3	F_1, F_2, F_3	F^*	a_M	b_M
$\left\{ \begin{array}{l} 2.9 \\ 3 \\ 3.1 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 0.76636221920 \\ 0.76634173046 \\ 0.76633055052 \end{array} \right\}$	0.76634236884	0.762241	-1.434116
$\left\{ \begin{array}{l} 3.9 \\ 4 \\ 4.1 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 0.76633783934 \\ 0.76633936154 \\ 0.76634050015 \end{array} \right\}$			
$\left\{ \begin{array}{l} 4.9 \\ 5 \\ 5.1 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 0.76634255625 \\ 0.76634252498 \\ 0.76634249132 \end{array} \right\}$			
$\left\{ \begin{array}{l} 5.9 \\ 6 \\ 6.1 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 0.76634236242 \\ 0.76634236033 \\ 0.76634235932 \end{array} \right\}$	0.76634236170	0.762096	-1.433925
		0.76634236170	0.762096	-1.433964
		0.76634236168	0.760466	-1.432816

Табл. 1. Трехточечные предсказания для F^* , a_M и b_M : $F = \bar{c}^2$, $r_0 = 0.5$ ($N=2000$)

$$a_M = |Z|/F^* + O(e^{(r-3)A}), \quad b_M = \arg Z + O(e^{(r-3)A}), \quad (28)$$

где Z – комплексное число, определяемое формулой

$$Z = e^{3A} \frac{e^{A\kappa i} [e^{\kappa h i} (F_2 - F_1) - e^{3h} (F_3 - F_2)]}{i \sin \kappa h [1 - e^{h(3+\kappa i)}]}. \quad (29)$$

Необходимо отметить, что формулы (27) и (28) являются асимптотическими и их точность зависит от выбора A . В таблице 1 показаны значения F^* , a_M и b_M , вычисленные согласно (27), (28) при $r_0 = 0.5$ для квадрата \bar{c}^2 фазовой скорости. В качестве A были выбраны значения $A = 3, 4, 5, 6$. Как видно из таблицы, при $A \geq 4$ разница между F^* составляет не более, чем две единицы последнего представленного десятичного знака. Для a_M и b_M эта разница больше, так как асимптотическая точность формулы (28) на три порядка меньше, чем формулы (27). Более того, значения a_M и b_M , вычисленные при $A = 6$, кажутся менее точными, чем значения, полученные при $A = 4$ и $A = 5$. Это связано со структурой формулы (29). Ее применение вынуждает вычитать близкие числа. При $A = 6$ эти числа становятся слишком близкими, что

r_0	$(\bar{c}^2)^*$	a_M	b_M	\bar{H}^*	a_M	b_M
10^{-13}	1.19308662739	0.82698	-1.06488	0.141063483983	0.93936	-1.6809
0.1	1.17100332317	0.82306	-1.07767	0.137801126688	0.92861	-1.6920
0.2	1.1082975804	0.8123	-1.11842	0.12849508825	0.89922	-1.7233
0.3	1.01372323076	0.79718	-1.19177	0.11443904156	0.8589	-1.77041
0.4	0.89716803315	0.7796	-1.29900	0.097373881750	0.8183	-1.8263
0.5	0.76634236170	0.7621	-1.4340	0.079072632041	0.78805	-1.8835
0.6	0.62582091433	0.7495	-1.5832	0.06098478518	0.7754	-1.9363
0.7	0.47790767917	0.7469	-1.7321	0.043975038484	0.7781	-1.9839
0.8	0.32382544632	0.75735	-1.8696	0.028257622315	0.78777	-2.0261
0.9	0.16434518329	0.7794	-1.9918	0.013667221747	0.7987	-2.0641
r_0	\bar{h}_a^*	a_M	b_M	\bar{h}_t^*	a_M	b_M
10^{-13}	4.774297570282	0.0079999	-1.8018	4.7281769034421	0.010769	0.53244
0.1	0.376333070385	0.0970902	-1.8163	0.331870051715	0.14665	0.50654
0.2	0.265031048262	0.12084	-1.8582	0.225241984008	0.18879	0.431029
0.3	0.199062761333	0.12954	-1.92363	0.166148787483	0.20459	0.3133
0.4	0.151623019490	0.12609	-2.0057	0.126656606348	0.19621	0.1690
0.5	0.114464306569	0.11391	-2.09598	0.097321173472	0.169830	0.0258
0.6	0.083985538837	0.09635	-2.1851	0.073529798154	0.1341	-0.0793
0.7	0.0582767396472	0.075669	-2.2663	0.052793290925	0.09698	-0.1248
0.8	0.0361808975751	0.052772	-2.3357	0.033914647255	0.06229	-0.1312
0.9	0.0169334599415	0.027619	-2.3943	0.016403308649	0.030117	-0.1307

Табл. 2. Трехточечные предсказания при $A = 5$ ($N=2000$): параметры осцилляций для квадрата \bar{c}^2 фазовой скорости и геометрических волновых характеристик

и приводит к неизбежной потере значащих цифр.

Таблицы, подобные таблице 1, были построены для всех волновых характеристик, введенных в предыдущем разделе. На основе этих вычислений при $A = 5$ были построены таблицы 2 и 3, в которых представлены параметры осцилляций при изменении r_0 от 10^{-13} до 0.9.

Следует отметить, что когда $A \rightarrow \infty$, крутизна волны \bar{H} стремится к предельному значению по закону [5]

$$\bar{H} = (1 - e^{-2A})[1 + a_M e^{-3A} \cos(\kappa A - b_M)]\bar{H}^*. \quad (30)$$

Следовательно, функция $\Omega(A)$ для \bar{H} должна быть определена так:

$$\Omega(A) = \frac{1}{a_M} \left[\frac{\bar{H}}{(1 - e^{-2A})\bar{H}^*} - 1 \right] + O(e^{-rA}).$$

r_0	\tilde{F}^*	a_M	b_M	\tilde{T}^*	a_M	b_M
10^{-13}	0.07011392667	4.0543	-1.7332	0.038292196898	4.3863	-1.6748
0.1	0.06707612256	4.017578	-1.7473	0.036292511049	4.34776	-1.6885
0.2	0.05874519127	3.9158	-1.7882	0.030922209563	4.2417	-1.7288
0.3	0.047095274136	3.7698	-1.85291	0.023708661336	4.0917	-1.79306
0.4	0.034463298744	3.607	-1.9355	0.016321638119	3.927	-1.8764
0.5	0.022807287369	3.4529	-2.0281	0.009982861722	3.7747	-1.9715
0.6	0.013346516199	3.329	-2.1214	0.005279137316	3.656	-2.0688
0.7	0.006559558623	3.2470	-2.2078	0.0022673398785	3.5831	-2.1600
0.8	0.002383057068	3.2075	-2.2826	0.0006780472102	3.5576	-2.2399
0.9	0.0004198073152	3.200	-2.3466	0.0000850939133	3.568	-2.3087
r_0	\tilde{V}^*	a_M	b_M	$\tilde{V}^* + \tilde{T}^*$	a_M	b_M
10^{-13}	0.034568325909	4.1414	-1.8018	0.07286052281	4.2615	-1.7332
0.1	0.032769992466	4.1086	-1.8163	0.06906250351	4.2257	-1.7473
0.2	0.027915670529	4.0177	-1.8583	0.05883788009	4.1268	-1.7884
0.3	0.021350176974	3.8873	-1.92362	0.045058838310	3.9864	-1.85325
0.4	0.014602399801	3.743	-2.00571	0.030924037920	3.832	-1.93592
0.5	0.008833857191	3.6085	-2.09597	0.018816718913	3.6896	-2.0286
0.6	0.004605055998	3.505	-2.1851	0.009884193314	3.580	-2.1218
0.7	0.0019464672979	3.4427	-2.2663	0.004213807176	3.5133	-2.2081
0.8	0.0005726364752	3.4213	-2.3357	0.001250683685	3.4912	-2.2828
0.9	0.0000707132768	3.430	-2.3943	0.0001558071901	3.502	-2.3467

Табл. 3. Трехточечные предсказания при $A = 5$ ($N=2000$): параметры осцилляций для энергетических волновых характеристик

Таким образом, параметры осцилляций для \tilde{H} в таблице 2 соответствуют формуле (30), а не (23). Каждое число в таблицах 2 и 3 имеет ошибку, не превосходящую двух единиц последнего десятичного знака.

Диапазон работоспособности асимптотических формул (23) виден из рис. 2. Здесь точки показывают значения функции $\Omega(A)$, вычисленные при $N = 1280$, сплошные линии – это косинусоиды (26), значения F^* , a_M и b_M были взяты из таблиц 2 и 3. При $r_0 = 10^{-13}$ (рис. 2а) и $r_0 = 0.5$ (рис. 2б) рассчитанные точки Ω от A прекрасно описываются формулой (26). Но при $r_0 = 0.9$ (рис. 2с) точки сходят с косинусоиды при $A > 6$. Дело в том, что при $r_0 = 0.9$ волны становятся очень длинными и их форма не может быть аппроксимирована точно при $N = 1280$. Чтобы вернуть точки на косинусоиду, достаточно увеличить N , то есть увеличить точность вычислений. Треугольники на рис. 2(с) пока-

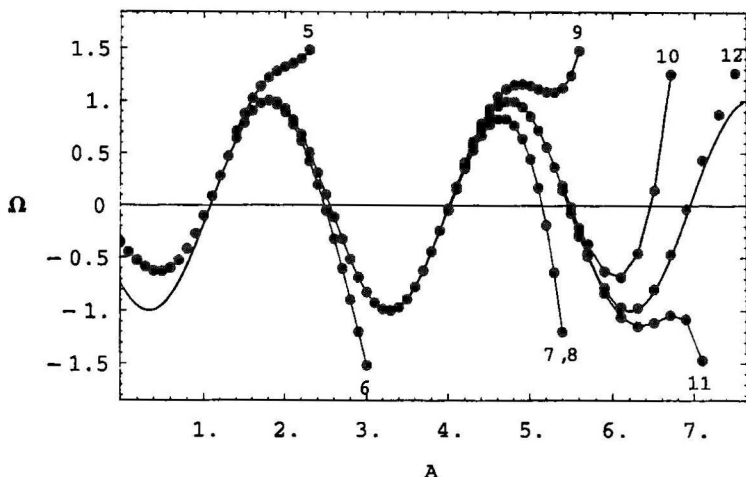


Рис. 3. Функция Ω от A : $F = \bar{h}_a$, $r_0 = 0.9$. В предельном значении $\bar{h}_a^* = 0.0169334599415$ было последовательно удержано 12,11,...,5 значащих цифр

зывают значения Ω от A , вычисленные при $N = 2000$. Как можно видеть, треугольники снова лежат на косинусоиде.

Прямоугольники на рис. 2 ограничивают положение трех точек, которые сгенерировали косинусоиды и, следовательно, предсказали поведение $\Omega(A)$ в диапазоне $1.1 \leq A < 7.5$. При $N = 1280$ графики, подобные графикам рис. 2, были построены для всех данных таблиц 2 и 3. Результаты были всегда очень схожими. Для относительно коротких волн ($r_0 \leq 0.5$) рассчитанные точки прекрасно ложились на косинусоиды. При $r_0 > 0.5$ точки начинали сходиться с косинусоид, начиная с некоторого $A > 6$. Более точные вычисления, выполненные при $N = 2000$, возвращали точки назад.

Таким образом, метод трехточечных предсказаний, основанный на комбинации асимптотических формул и точных численных результатов, позволяет не только найти параметры косинусоид, но и определить предельные волновые характеристики без специального расчета предельных волн. Значения предельных ха-

характеристик в таблицах 2 и 3 на первый взгляд выглядят слишком длинными, но даже последние представленные знаки оказываются важными для воспроизведения осцилляций в диапазоне $1.1 < A < 7.5$. В самом деле, на рис. 3 показаны точки Ω от A для средней глубины \bar{h}_a при $r_0 = 0.9$. Из таблицы 2 можно найти, что $\bar{h}_a^* = 0.0169334599415$. Мы последовательно удерживали в этом числе 12, 11, ..., 5 знаков и наносили полученные значения Ω от A на график. Хорошо заметно, как точки сходят с косинусоиды, если точность определения \bar{h}_a^* является недостаточной.

Численные эксперименты показали, что при $A > 2.2$ асимптотическая формула (23) дает не менее пяти правильных значащих цифр для всех исследованных волновых характеристик. При $A > 2.5$ число правильных значащих цифр уже не менее шести.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 99-01-00169, 99-01-00173).

ЛИТЕРАТУРА

1. Cokelet E.D. 1977 *Steep gravity waves in water of arbitrary uniform depth* // Philos. Trans. Roy. Soc. Lond. – 1977. – V. 286. – P. 183–230.
2. Evans W.A.B. & Dörr U. *New minima in solitary water wave properties close to the maximum wave* // Rep. Physics Lab., University of Kent, UK. – 1996. – 22 p.
3. Evans W.A.B. & Ford M.J. *An exact integral equation for solitary waves (with new numerical results for some "internal" properties)* // Proc. Roy. Soc. Lond. – 1996. – V. 452. – P. 373–390.
4. Longuet-Higgins M.S. & Fox M.J.H. *Theory of the almost-highest wave: the inner solution* // J. Fluid Mech. – 1977. – V. 80. – P. 721–741.
5. Longuet-Higgins M.S. & Fox M.J.H. *Theory of the almost-highest wave, Part 2, Matching and analytical extension* // J. Fluid Mech. – 1978. – V. 85. – P. 769–786.
6. Longuet-Higgins M.S. & Fox M.J.H. *Asymptotic theory for the almost-highest solitary wave* // J. Fluid Mech. – 1996. – V. 317. – P. 1–19.
7. Longuet-Higgins M.S. & Tanaka M. *On the crest instabilities of steep surface waves* // J. Fluid Mech. – 1997. – V. 336. – P. 51–68.
8. Маклаков Д.В. *Обтекание препятствия с образованием нелинейных волн на свободной поверхности. Предельные режимы*

// Изв. РАН. МЖГ. – 1995. – No 2. – С. 108–117.

9. Маклаков Д.В. *Нелинейные задачи гидродинамики потенциальных течений со свободными границами*. – М.: Янус-К, 1997. – 281 с.

10. Maklakov D.V. *A note on the optimum profile of a sprayless planing surface* // J. Fluid Mech. – 1999. – V. 384. – P. 281–292.

11. Schwartz L.W. *Computer extension and analytic continuation of the Stokes expansion for gravity waves* // J. Fluid Mech. – 1974. – V. 62. – P. 553–578.

12. Tanaka M. *The stability of solitary waves* // Phys. Fluids. – 1986. – V. 29. – P. 650–655.

13. Tanaka M. *On the “crest instabilities” of steep gravity waves* // Workshop on Mathematical Problems in the Theory of Nonlinear Water Waves / CIRM, Luminy, France, May 1995 (Abstract only).

14. Woods L.C. *Compressible subsonic flow in two-dimensional channels with mixed boundary conditions* // Quart. J. Mech. and Appl. Math. – 1954. – V. 7. – No 3.

РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ D И A ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В СЛУЧАЕ ПЛОСКИХ ОБЛАСТЕЙ ПРИВЕДЕНИЕМ К ОДНОИМЕННЫМ ЗАДАЧАМ ДЛЯ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Л. И. Чибрикова

Казанский государственный университет

Рассматривается вещественное эллиптическое дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$E(u) \equiv \Delta + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = 0 \quad (1)$$

с \mathbb{R} -аналитическими коэффициентами a, b, c в заданной плоской области $T \subset \mathbb{C}$. Речь идет о возможности конструктивного построения регулярных решений граничной задачи Дирихле (задачи D) и ее обобщения с производными в краевом условии (задачи A). Основой для этой работы послужила монография И. Н. Векуа